MA2115 Matemáticas IV (semi-presencial)
Práctica 07

Boris Iskra
María Neida Barreto

1. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales.

Ejemplo 1

Halle las soluciones del sistema

$$\begin{array}{rcrcr} x' & = & 6x & - & 3y \\ y' & = & 2x & + & y \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos los autovalores y los autovectores
$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda - 4)(\lambda - 3)$
Autovalores: 3 *y* 4
Autovectores: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ejemplo 1 (Continuación)

Resumiendo

$$\begin{array}{ccc} \textit{Autovalores} & 3 & 4 \\ \textit{Autovectores} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

La solución general es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t},$$

o

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x(t) & = & C_1 e^{3t} + 3C_2 e^{4t} \\ y(t) & = & C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{4t}. \end{array}}$$

Ejemplo 2

Halle las soluciones del sistema

$$\begin{array}{rcrcr} x' & = & x & + & y \\ y' & = & 4x & - & 2y \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Hallamos los autovalores y los autovectores
$P_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$
Autovalores: -3 *y* 2
Autovectores: $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 2 (Continuación)

Resumiendo

$$\begin{array}{ccc} \textit{Autovalores} & -3 & 2 \\ \textit{Autovectores} & \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

La solución general es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t},$$

o

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x(t) & = & -C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} \\ y(t) & = & 4C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}. \end{array}}$$

Ejemplo 3

Halle la solución del sistema

$$\begin{array}{rcrcrl} x' & = & -11x & + & 7y & x(0)=5 \\ y' & = & -20x & + & 13y & y(0)=6 \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} -11 & 7 \\ -20 & 13 \end{pmatrix}$$

Hallamos los autovalores y los autovectores
$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$
Autovalores: -1 *y* 3
Autovectores: $v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ejemplo 3 (Continuación)

Resumiendo

$$\begin{array}{ccc} \textit{Autovalores} & -1 & 3 \\ \textit{Autovectores} & \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

La solución general es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t},$$

o

$$x(t) = 7C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$$
$$y(t) = 10C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{3t}$$

.

Ejemplo 3 (Continuación)

Evaluando la condición inicial

$$\begin{array}{rll} x(t) = & 7C_1e^{-t} + C_2e^{3t} & x(0) = 5 \\ y(t) = & 10C_1e^{-t} + 2C_2e^{3t} & y(0) = 6. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 5 & = & 7C_1 + C_2 \\ 6 & = & 10C_1 + 2C_2. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcr} C_1 & = & 1 \\ C_2 & = & -2. \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{rl} x(t) = & 7e^{-t} - 2e^{3t} \\ y(t) = & 10e^{-t} - 4e^{3t}. \end{array}}$$

Ejemplo 4

Halle las soluciones del sistema

$$\begin{array}{rcrcr} x' & = & x & + & 4y \\ y' & = & -4x & - & 7y \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallamos los autovalores y los autovectores
$P_A(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$
Autovalores: -3 *(con multiplicidad* 2*.)*
Autovector: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
Autovector generalizado: $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$

Ejemplo 4 (Continuación)

Resumiendo

Autovalor	-3
Autovector	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
Autovector generalizado	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$

La solución general es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} \right],$$

o

$$\boxed{\begin{array}{rcrcl} x(t) & = & C_1 e^{-3t} & + & C_2 \left(te^{-3t} + \frac{1}{4} e^{-3t} \right) \\ y(t) & = & -C_1 e^{-3t} & - & C_2 te^{-3t} \end{array}}$$

Ejemplo 5

Halle las soluciones del sistema

$$\begin{array}{rcrcr} x' & = & 6x & - & 4y \\ y' & = & x & + & 2y \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallamos los autovalores y los autovectores

$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 6 = (\lambda - 4)^2$

Autovalores: 4 *(con multiplicidad* 2.*)*

Autovector: $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Autovector generalizado: $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ejemplo 5 (Continuación)

Resumiendo

$$\begin{array}{cc} \textit{Autovalor} & 4 \\ \textit{Autovector} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{c}\textit{Autovector} \\ \textit{generalizado}\end{array} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

La solución general es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{4t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{4t} \right],$$

o

$$\boxed{\begin{array}{rcrcl} x(t) & = & 2C_1 e^{4t} & + & C_2 \left(2te^{4t} + e^{4t}\right) \\ y(t) & = & C_1 e^{4t} & + & C_2 te^{4t} \end{array}}$$

Ejemplo 6

Halle las soluciones del sistema

$$\begin{array}{rcrcr} x' & = & -x & - & y \\ y' & = & 2x & - & y \end{array} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallamos los autovalores y los autovectores

$P_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 3 = (\lambda + 1 - i\sqrt{2})(\lambda + 1 + i\sqrt{2})$

Autovalores: $-1 + i\sqrt{2}$ *y* $-1 - i\sqrt{2}$

Autovectores: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{pmatrix}$ *y* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Ejemplo 6 (Continuación)

Resumiendo

$$\begin{array}{lcc} \textit{Autovalores} & -1+i\sqrt{2} & -1-i\sqrt{2} \\ \textit{Autovectores} & \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Una solución general compleja es:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= e^{(-1+i\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= e^{-t} \left(\cos\left(\sqrt{2}t\right) + i\,sen\left(\sqrt{2}t\right)\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{2}t\right) & + & i\,sen\left(\sqrt{2}t\right) \\ \sqrt{2}\,sen\left(\sqrt{2}t\right) & - & i\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}t\right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Ejemplo 6 (Continuación)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{2}t\right) & +i\,sen\left(\sqrt{2}t\right) \\ \sqrt{2}\,sen\left(\sqrt{2}t\right) & -i\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}t\right) \end{pmatrix},$$

Tomando parte real e imaginaria, tenemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{2}t\right) \\ \sqrt{2}\,sen\left(\sqrt{2}t\right) \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} sen\left(\sqrt{2}t\right) \\ -\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}t\right) \end{pmatrix},$$

o

$$\boxed{\begin{array}{rclcl} x(t) & = & C_1 e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) & + & C_2 e^{-t}\,sen(\sqrt{2}t) \\ y(t) & = & C_1 e^{-t}\sqrt{2}\,sen(\sqrt{2}t) & - & C_2 e^{-t}\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \end{array}}$$

Ejemplo 7

Halle las soluciones del sistema

$$\begin{array}{rcrcl} x' & = & 2x & - & \frac{5}{2}y \\ y' & = & \frac{9}{5}x & - & y \end{array} \quad con \quad \begin{array}{l} x(0) = 5 \\ y(0) = -6 \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{pmatrix}$$

Hallamos los autovalores y los autovectores

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + \frac{5}{2} = (\lambda - \frac{1+3i}{2})(\lambda - \frac{1-3i}{2})$$

Autovalores: $\frac{1+3i}{2}$ *y* $\frac{1-3i}{2}$

Autovectores: $v_1 = \begin{pmatrix} 5+5i \\ 6 \end{pmatrix}$ *y* $v_2 = \begin{pmatrix} 5-5i \\ 6 \end{pmatrix}$

Ejemplo 7 (Continuación)

Tenemos

$$\textit{autovalor: } \frac{1+3i}{2} \textit{ asociado a } \begin{pmatrix} 5+5i \\ 6 \end{pmatrix}$$

Una solución compleja es:

$$\begin{aligned} e^{\frac{1+3i}{2}t} \begin{pmatrix} 5+5i \\ 6 \end{pmatrix} &= e^{\frac{1}{2}t} \left(\cos\left(\tfrac{3}{2}t\right) + i\, sen\left(\tfrac{3}{2}t\right)\right) \begin{pmatrix} 5+5i \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= e^{\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 5\cos\left(\frac{3}{2}t\right) - 5\, sen\left(\frac{3}{2}t\right) \\ 6\cos\left(\frac{3}{2}t\right) \end{pmatrix} \\ &+ ie^{\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 5\cos\left(\frac{3}{2}t\right) + 5\, sen\left(\frac{3}{2}t\right) \\ 6\, sen\left(\frac{3}{2}t\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 7 (Continuación)

Tomando las partes real e imaginaria, obtenemos las soluciones generales:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 5\cos\left(\frac{3}{2}t\right) - 5\,sen\left(\frac{3}{2}t\right) \\ 6\cos\left(\frac{3}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

$$+ C_2 e^{\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 5\cos\left(\frac{3}{2}t\right) + 5\,sen\left(\frac{3}{2}t\right) \\ 6\,sen\left(\frac{3}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\frac{1}{2}t}\left(5\cos\left(\tfrac{3}{2}t\right) - 5\,sen\left(\tfrac{3}{2}t\right)\right) \\ &\quad + C_2 e^{\frac{1}{2}t}\left(5\cos\left(\tfrac{3}{2}t\right) + 5\,sen\left(\tfrac{3}{2}t\right)\right) \\ y(t) &= C_1 e^{\frac{1}{2}t} 6\cos\left(\tfrac{3}{2}t\right) + C_2 e^{\frac{1}{2}t} 6\,sen\left(\tfrac{3}{2}t\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 7 (Continuación)

Evaluando la condición inicial

$$\begin{array}{rcl} 5 & = & 5C_1 + 5C_2 \\ -6 & = & 6C_1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcr} C_1 & = & -1 \\ C_2 & = & 2. \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x(t) & = & e^{\frac{1}{2}t}\left(5\cos\left(\frac{3}{2}t\right) + 15\,sen\left(\frac{3}{2}t\right)\right) \\ y(t) & = & e^{\frac{1}{2}t}\left(12\,sen\left(\frac{3}{2}t\right) - 6\cos\left(\frac{3}{2}t\right)\right) \end{array}}$$

FIN